

STEM-fag:

Matematiske teorier og historiske fortællinger på museum

Dette undervisningsforløb er udviklet i samarbejde med Fredericia Gymnasium efterår 2020 i fagene historie og matematik. Tanken med forløbet er at inddrage jernbanemuseets formidling og udstilling i det faglige arbejde med fagene matematik og historie på gymnasialt niveau. Samtidig er forløbet tænkt ind i målsætningen for Projekt VOYAGER, hvor elever fra ungdomsuddannelserne i højere grad skal have øjnene op for de tekniske og naturvidenskabelige uddannelser (STEM-fag/-uddannelser). Det fremmes vha. forløb, der dels løfter faget ud af skolen og dels bliver anvendelsesorienteret og rettet mod rigtige problemer ude i virkeligheden og altså i dette forløb problemer, man har stået med historisk set i forhold til drift, brug af og anlæggelse af jernbaner.

Forløbet er et innovationsforløb, hvor de to fag skal bidrage til at give bud på, hvordan problemstillinger indenfor de tre nedennævnte emner kan løses. Den overordnede problemstilling er:

"Hvordan sætter vi centrale matematiske teorier i spil i de historiske fortællinger på Danmarks Jernbanemuseum?"

Der kan arbejdes med dette emne på to måder:

- Den ene er, hvor gymnasiet har en uge eller undervisningstid i de to fag over flere uger til rådighed, og det er det fulde forløb. Her skal I på Danmarks Jernbanemuseum i opstartsfasen af forløbet.
- Den anden måde er en halv dag på museet, hvor der arbejdes med et udsnit af historie- og matematikdelen, og eleverne får mulighed for at lade sig inspirere i museets udstilling samt får adgang til kildepakker. Begge måder skal munde ud i et pitch eller en præsentation, hvor eleverne i grupper skal fortælle eller vise, hvordan de vil sætte centrale matematiske teorier i spil i de historiske fortællinger på Danmarks Jernbanemuseum.

I det fulde forløb skal det være en færdig præsentation med svar og udviklet koncept eller produkt. I halvdagsforløbet på museet nøjes vi med at høre et udkast i idéfasen.



Første emne: **Udvikling af banenettet i Danmark**

Udviklingen af banenettet i Danmark (den interaktive tavle i udstillingen), hvor eleverne i matematik

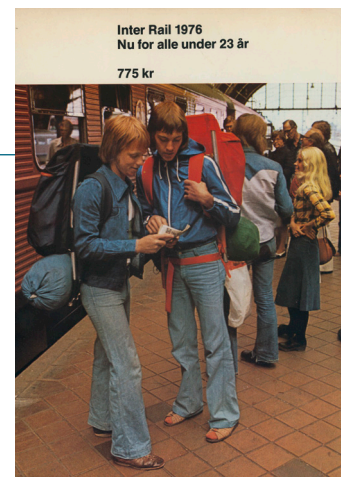


Andet emne: **Interrail og planlægning af rejserute**

Udstillingen "Drømmenes Kupé" (de forskellige interrail-ruter), hvor eleverne i matematik skal arbejde med at lave algoritmer. Hvordan planlægger man en rute og fx finder den korteste vej fra A til B? (ligesom Google Maps)

Tredje emne: **Tog og sikkerhed**

Udstillingen "Drømmenes Kupé" (de forskellige interrail-ruter), hvor eleverne i matematik skal arbejde med at lave algoritmer. Hvordan planlægger man en rute og fx finder den korteste vej fra A til B? (ligesom Google Maps)



I historie skal eleverne arbejde med faglig formidling/remediering, hvor de dels henter inspiration fra de eksisterende udstillinger og dels bruger de kildepakker, som de får udleveret. Kildepakkerne findes som PDF på museets webside. Det kan med fordel overføres til et ressourcerum på gymnasiets eget drev eller netværk.

I matematikdelen skal eleverne præsenteres for nogle hovedtræk i nogle forskellige matematiske emner i forskellig sværhedsgrad og herefter arbejde videre indenfor disse emner, overføre det til en anvendelse i forbindelse med jernbaner og arbejder med en fremstilling/et udstillingselement i samarbejde med historie, der skal give andre elever indblik i netop dette emne og dets anvendelsesmuligheder.

Både i historie og i matematik skal underviserne facilitere en problemafklaring for eleverne.

Problemafkklaring i historie:

- Lave en museumsanalyse for at få en fornemmelse af museet – den ramme, som jeres fortælling skal passe ind i.
- Kort gennemgang af, hvad er en historisk fremstilling er, og hvad skal eleverne tage højde for, når de remedier?
- Hvad kommer vi til at arbejde med i historie? Hvad er vores fokus?
- Tjekke de forskellige kildepakker ud i ressourcerummet
- Gå rundt og tage billeder/samle til bunke, så eleverne har nok at arbejde med i løbet af ugen.
(Der vil være mulighed for at få materiale eftersendt af museet)
- Aftaler om lektier for ugen (vil typisk være kildepakkerne)

Problemafkklaring i matematik:

- Introduktion til de tre hovedemner matematisk set:
 - **Interrail** – Introduktion til grafteori
 - **Sikkerhed** – Lineære funktioner og parameterfremstillinger
 - **Udvikling** af jernbanenettet – Introduktion til funktioner af to variable
- Eulers grafteori
Hvad går det ud på, og hvordan kan det ses i sammenspil med kilderne?
- Dijkstras algoritme
Hvad går det ud på, og hvordan kan det ses i sammenspil med kilderne?

Før – under – efter museumsbesøget

Det lange forløb – en uge eller timer fordelt over flere uger.

Historie

Før museumsbesøg	På museet	Efter museet
Introduktion til museumsanalyse Gennemgang af, hvad der er en historisk fremstilling	Lave museumsanalyse Indsamle inspiration og materiale til det videre arbejde Udvælge fokus/delemne på overordnet problemstilling	Arbejde med den innovative problem-løsning Klargøre produkt og fremlæggelse

Matematik

Før museumsbesøg	På museet	Efter museet
Introduktion til de tre matematiske modeller: • Grafteori • Lineære funktioner • Funktioner med to variable	Udvælge fokus/delemne på overordnet problemstilling; hvilken matematisk model passer til vores område?	Arbejde med den innovative problem-løsning Klargøre produkt og fremlæggelse

Det korte forløb – en halv dag på museet

På museet
Her foregår hele innovationsforløbet i begge fag på museet. En overordnet plan for dagen kunne være:
1) Fælles opstart – I udstillingen Overordnet problemstilling præsenteres og dagens plan ved spor 1 Museumsunderviser giver kort rids over jernbanehistorien fra start til nu og slutter med ca. 5-10 min. i udstillingen "Drømmenes Kupe"
2a) Intro til kildepakker og brug – herunder kort om begreber i museumsanalyse, historiedel 2b) Intro til matematisk model – Udvikling af jernbanenettet (funktioner med to variable), matematikdel
3) Arbejde i grupper med egen delproblemstilling Forslag til løsning – med inddragelse af matematisk model og historiske kilder
4) Fælles afslutning Pitch, hvor en skitse af idéer kort præsenteres for holdet

Museumsanalyse – Historie

Udstillingsniveau	Udstillingssprog, og -måde: Hvilken målgruppe har teksterne i udstillingerne (parateksterne)? Hvad er arrangørens hensigt og budskab? Fremgår budskabet tydeligt af udstillingen? Er parateksterne med til at hjælpe med at forstå udstillingens budskab?
	Hvad lægger udstillingen vægt på? Fx: • læring og viden (det didaktiske princip) • fortælling og følelser (det affektive princip) • sansning og skønhed (det æstetiske princip)
Museumsniveau	Museumsbygningen: Hvornår er den opført? Hvordan er bygningen indrettet? Er der paratekster, der beskriver bygningens arkitektur? Hvilke? Hvilke indtryk vil museet give udadtil med bygningerne? Hvordan er museet placeret i forhold til sine omgivelser?
Andet	Organisationsstruktur: Hvordan er museet organiseret? Hvem udfører hvilket arbejde? Hvordan er museer organiserede sammenlignet med private virksomheder? Beslutningskompetence: Hvem bestemmer over museet? På museet? Har lokale politikere indflydelse på museet? Har Kulturministeriet? Andre?
	Finansiering: Hvordan finansieres museet? Hvordan tjener det penge? Kan man investere i museet? Hænger finansiering og forskning sammen? Har sponsorer indflydelse på, hvad der udstilles eller ikke udstilles?
Kommunikationssøjlen	Hvilken kommunikationsstrategi har man valgt i udstilling og bygninger? Fx:
Laissez-faire	• Den valgfri rundgang Gæsten bestemmer selv sin rute og sine fordybelsesområder
Transmission	• Overførsel af viden Gæsten skal på ruten have flest mulige informationer om de udstillede genstande
Konstruktivisme	• Spørgsmål og svar Gæsten danner sin egen opfattelse og viden på baggrund af egne erfaringer og udstillingens spørgsmål
Storytelling	• Den narrative rundgang Gæsten får på ruten fortalt en historie, som vedkommende kan identificere sig med på forskellige planer

(Fra: Museumsgrundbogen, Thorhauge og Larsen, Systime, 2008)

Innovationsforløb – faseopdelt model

Problemafkklaring	Lærer • Indskrænk og præciser vidensfeltet til det nødvendige • Afdæk og synliggør den viden, eleven allerede har • Indret lokalet, så der bliver plads til undersøgelser • Anerkend undren, famlen, ikke-viden, nysgerrighed, vedholdenhed • Hjælp eleven med indsamling af empiri	Elev • Vær nysgerrig • Brug alle kilder til at få mere viden • Del din viden frit med alle • Er der noget, du ikke ved, så sørg for at finde ud af det • Overhold aftaler og deadlines
Problemløsning	Lærer • Indret rummet, så det fordrer divergent tænkning • Bidrag til god stemning og sørg for at styre processen, så eleven er i flow • Anerkend vilde, skøre idéer og kreative indslag og prøv at lade være med at vurdere idéerne • Understøt eleverne i at være åbne overfor nye idéer over lang tid	Elev • Det er godt at få vilde og skøre indfald og idéer • Nedskriv og fasthold nye idéer løbende • Anerkend andres idéer og hjælp med at bygge videre på dem • Bidrag til, at alle har det skægt og er trygge i processen • Undgå at fokusere på kun én idé, selvom I synes, den er god
Produktudvikling	Lærer • Stil kritiske og konstruktive spørgsmål • Hjælp eleverne med en plan for processen • Mind eleverne om projektets faglige mål • Sørg for, at nødvendige materialer er tilgængelige • Skab ny inspiration fx vha. en "stjælerunde" på tværs af grupperne	Elev • Visualiser jeres idé og læg projektplan for at realisere det • Sørg for at indsamle den viden og de materialer, I skal bruge for at nå målet • Gennemfør planen og overhold deadlines og aftaler internt i gruppen • Udnyt hinandens forskellige ressourcer i gruppen og etabler et godt samarbejde
Præsentation	Lærer • Hjælp eleverne til i god tid at påbegynde et manus til deres præsentation • Tilbyde diverse formidlingsværktøjer • Faciliter øvelser, der sætter eleven i stand til at vurdere egen proces og produkt • Give feedback på elevernes proces og produkt	Elev • Forbered jeres pitch/fremlæggelse/produkt ned i mindste detalje • Overhold tidskravet • Suppler jeres mundtlige/skriftlige præsentation med en visualisering • Vurder jeres eget produkt ud fra de opsatte faglige krav for hele projektet

De tre matematik-cases

SIKKERHED

LINEÆRE FUNKTIONER & PARAMETERFREMSTILLINGER

På de følgende sider skal I arbejde med lineære funktioner og vektorer, som I allerede kender samt introduceres til anvendelse af parameterfremstillinger. I skal arbejde med nogle eksempler og på den måde nå frem til, hvad det er for nogle størrelser, og hvad de kan bruges til. Det er jeres opgave at se hvordan, det kan bruges i forhold til sikkerhed på jernbanen.

I skal arbejde med

- Lineære funktioner og deres skæring

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Tid

Tid blev afgørende for jernbanesikkerheden. Der skulle være mindst 10 minutter mellem hver afgang fra stationen for at sikre, at togene ikke kørte op i hinanden.

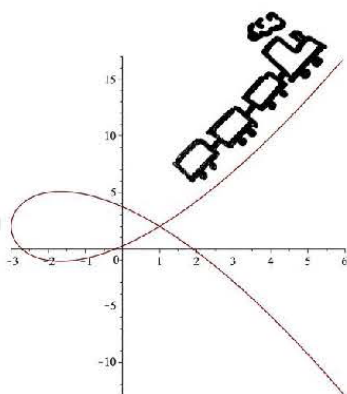
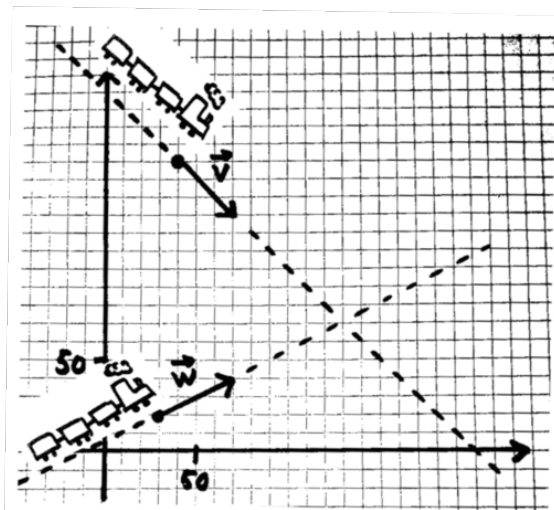
Før jernbanen var lokal tid bestemt af solens placering på himlen. Der var derfor ikke fælles tid i hele Danmark - men på grund af jernbanen besluttede man i 1858 at anvende Københavns lokaltid som fælles jernbanetid. Først i 1880 blev der fælles national tid for alle.

Fra Jernbanehistorie, Danmarks Jernbanemuseum

- Parameterfremstillinger for linjer og to slags skæringer - på samme tid eller forskudt.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- To ligninger og to ubekendte - betydning af løsningen for sammenstød eller ej.
- Parameterfremstillinger for ikke-ret linjede bevægelser



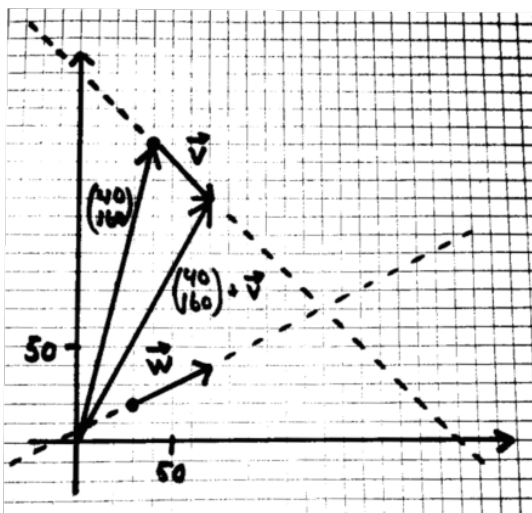
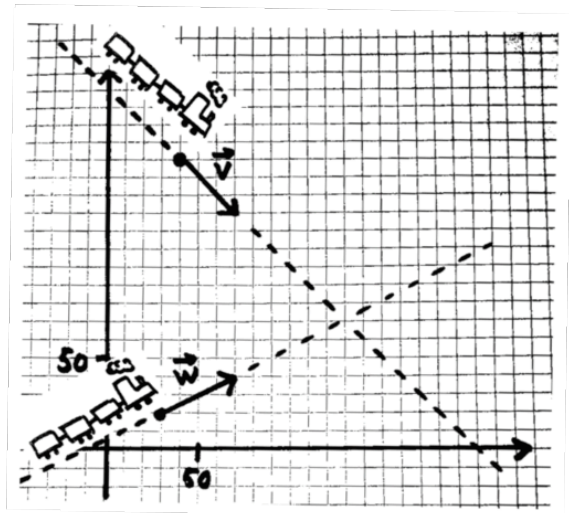
Arbejdsark

Togenes bevægelse vha. lineære funktioner

- Det fremgår af sikkerhedsudstillingen at hastigheden for et damplokomotiv i 1847 er 45 km/t. Tegn et koordinatsystem hvor t har timer på x-aksen og den kørte afstand på y-aksen. Kan I beskrive den kørte afstand som funktion af tiden med en lineær funktion, $f(x)$?
- I 1847 var der som minimum 10 minutter mellem hver afgang fra en station så togene ikke ville køre op bag i hinanden. Hvor langt kører et damplokomotiv på 10 minutter i 1847?
- Lad os sige der er to afgang fra en station. Tog nr. 1 har fået et forspring og har kørt 7,5 km. Tog nr. 2 er netop ved at køre fra stationen. Vi ser bort fra at det tager tid at komme op i fart og regner blot med at tog nr. 2 når sin tophastighed på 45 km/t med det samme (måske er det slet ikke stoppet ved netop denne station...), mens tog nr. 1 allerede kører 45 km/t. Til tidspunkt 0 har tog nr. 1 altså kørt 7,5 km mens tog nr. 2 har kørt 0. Kan I illustrere dette i et koordinatsystem? Rammer de hinanden?
- Kan I for hvert tog beskrive den kørte afstand som funktion af tiden?
- Vi laver nu om på tog nr. 2 så det i stedet for 45 km/t kører med en hastighed på 50 km/t. Rammer togene nu hinanden - hvor lang tid går der?

Togenes bevægelse vha. parameterfremstilling

- Betragt nedenstående kort, koordinatsystem og de to tog. Øverste tog er nr. 1. I stedet for en akse med tid og en akse med kørt afstand har vi nu i stedet koordinater for togenes placering svarende til GPS-koordinater. Hvilke koordinater har tog nr. 1? Tog nr. 2?
- Togene kører nu på hver deres skinner, men mod et sted hvor skinnerne krydser hinanden. Vi vil bruge vektorer til at beskrive togenes bevægelse. For hver time bevæger tog nr. 1 sig med vektor v og tog nr. 2 med vektor w . Angiv koordinaterne til vektor v og vektor w .
- Tog nr. 1 starter altså i punkt $(40,160)$ og bevæger sig for hver time med vektor v . Hvor er tog nr. 1 nået til efter 1 time? Efter 1.5 timer?
- Hvor er tog nr. 2 efter 1 time? Efter 1.5 timer?



- Husk på at togene for hver time der går bevæger sig én vektor - hhv. v og w . Kan I beregne den hastighed togene bevæger sig med?
- Vi vil finde ud af om de to tog støder sammen hvor skinnerne krydser. Hvad siger I til det, hvis I betragter kortet og togenes bevægelser?
- I skal prøve at regne på, om de støder sammen. Dertil skal vi først beskrive togenes

Vi starter med tog nr. 1

Først skal vi have fat i begrebet stedvektor. En stedvektor er en vektor, der går fra (0,0) til et punkt.

Vi bruger først togets startpunktet $(x_0, y_0) = (40, 160)$ til at lave en stedvektor $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 160 \end{pmatrix}$

Til tid nul befinder toget sig i enden af denne stedvektor.

Efter en time vil toget have flyttet sig med vektor v og vil derfor befinde sig i enden af den stedvektor, vi får, ved at lægge $\begin{pmatrix} 40 \\ 160 \end{pmatrix}$ sammen med v . Se tegningen

Sådan fortsættes, når tiden går, og vi kan nu opskrive den stedvektor, som toget vil befinde sig i enden af, til et givet tidspunkt t ved $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 160 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \end{pmatrix}$

Det kalder vi en parameterfremstilling for tog nr. 1.

Opskriv en parameterfremstilling for tog nr. 2 - brug s som variabel i stedet for t .

- Kontroller ved beregninger hvor hvert tog befinder sig efter 1 time og efter 1.5 timer ved at benytte parameterfremstillingen.
- Vi har nu parameterfremstillinger for de to tog.
For det ene tog bruger vi t som tid, og for det andet bruger vi s .
Vi skal undersøge, om der findes et tidspunkt t og et tidspunkt s , som giver den samme placering af togene - altså, om togene krydser hinandens baner. Fra parameterfremstillingerne svarer det til at skulle løse to ligninger med to ubekendte, nemlig ligningerne

$$40 + t \cdot 30 = 30 + s \cdot 40$$

$$160 + t \cdot (-30) = 20 + s \cdot 20$$

Prøv at løse dem selv eller vha. Maple og solve({ligning 1, ligning 2},{s,t})

- Hvad betyder de værdier af s og t som er løsning af ligningerne?
- Hvad ville det betyde hvis s og t havde samme værdi ved løsning af ligningen?
- Hvad ville det betyde hvis der ikke var en løsning til?

Flere bevægelser

- Lad os se på nogle flere tog: Et tredje togs bevægelse kan beskrives vha. følgende parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t \cdot 2 \cdot \pi) \\ \sin(t \cdot 2 \cdot \pi) \end{pmatrix}$$

Prøv at tegne den i Maple vha.

$$x := 4 + \frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot \cos(t \cdot 2 \pi)$$

$$y := 5 + \frac{45}{2 \cdot \pi} \cdot \sin(t \cdot 2 \pi)$$

$$\text{plot}([x, y, t = 0 .. 1])$$

- Et andet tog følger denne parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 3 \\ t^3 - 4t + 2 \end{pmatrix}$$

Prøv at tegne den i Maple vha.

$$x := t^2 - 3$$

$$y := t^3 - 4t + 2$$

$$\text{plot}([x, y, t = -3 .. 3])$$

- Prøv selv at finde på andre bevægelser. Hvordan er det, at disse bevægelser adskiller sig fra grafer for funktioner?
- Kan alle disse bevægelser og beregninger indgå i overvejelser omkring sikkerhed for jernbanen?

Udvikling af jernbanenettet

INTRODUKTION TIL FUNKTIONER AF TO VARIABLE

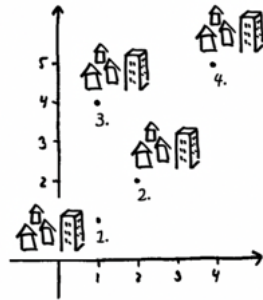
På de følgende sider skal I introduceres til funktioner af to variable. I skal arbejde med nogle eksempler og på den måde nå frem til hvad det er for en størrelse og hvad funktioner af to variable kan bruges til.

Det er jeres opgave at se hvordan det kan bruges i forhold til udviklingen af jernbanenettet.

I skal arbejde med begreber som

- Optimal placering
- Funktioner af to variable

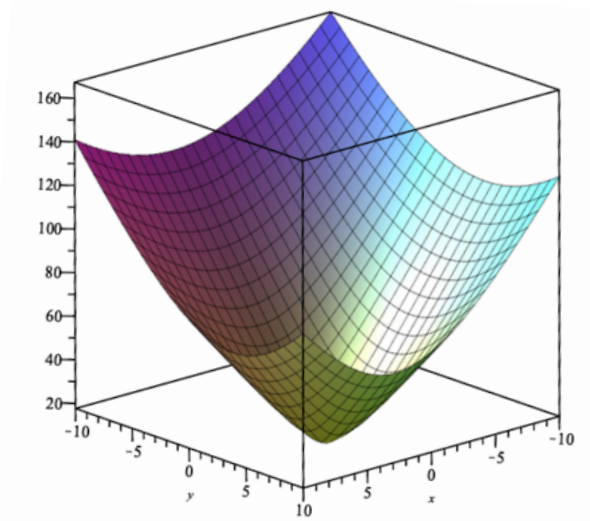
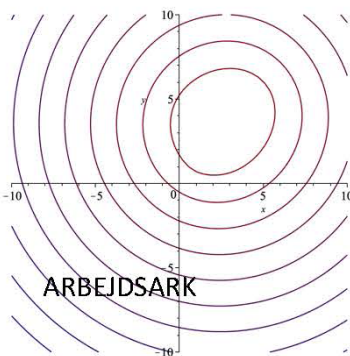
$$f(x,y)=...$$



Kort over jernbanenettet anno 1930'erne

- Koordinatsystem i 3D - og tegning af grafer her

- Niveaukurver



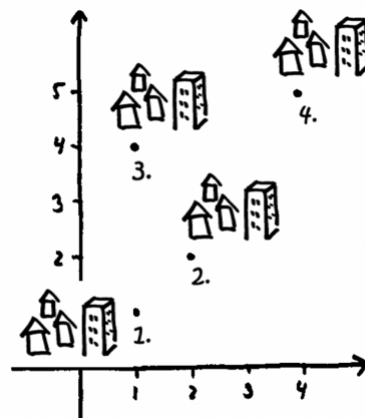
- I skal starte med at se på en problemstilling, der handler om placeringen af en ny skole:

Vi betragter kortet her til højre. På kortet finder vi fire byer. Børnene fra de fire byer skal gå i samme skole. Vi skal finde den bedste placering, den optimale, af skolen.

Da børnene bliver kørt i skole skal vi gøre den samlede afstand til skolen så lille som mulig og dermed gøre brændstofforbruget så lille som muligt.

På hvilke koordinater ligger byerne?

Hvor vil I placere skolen? Prøv at indtegne en placering på kortet og argumenter for hvorfor.



- Lad os sige der er ét barn fra hver by, der skal i skole. Vi skal prøve at opskrive et udtryk for den samlede afstand, børnene skal køres, for at komme i skole. Lad os sige, at skolen placeres i punktet (2,3)

og lad os regne på afstanden til by nr. 1. Kan Pythagoras være jer til hjælp i beregningen af afstande? Argumentér for, at vi ved hjælp af Pythagoras får

$$\sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2}$$

- Nu prøver vi med beregning af afstand fra skolen til by nr. 2. Argumenter for at vi ved hjælp af Pythagoras får

$$\sqrt{(2-2)^2 + (3-2)^2}$$

- Hvor stor er den samlede afstand som de fire børn tilsammen skal køres for at komme i skole?
- Tag igen udgangspunkt i at skolen placeres i (2,3). Nu er der bare to børn fra by nr. 2 som skal i skole, mens der stadig er ét barn fra hver af de tre andre. Hvad betyder det for den samlede afstand børnene skal køres for at komme i skole?
- Nu laver vi om igen så der nu også er to børn fra by nr. 3 og fire børn fra by nr. 4 der skal i skole. Argumenter for hvad nedenstående regnestykke er et udtryk for:

$$\sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} + 2 \cdot \sqrt{(2-2)^2 + (3-2)^2} + 2 \cdot \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2} + 4 \cdot \sqrt{(2-4)^2 + (3-5)^2}$$

- I stedet for at have fastlagt en placering af skolen, vil vi i stedet kalde skolens placering for (x,y) og derfor erstatte (2,3) med (x,y). Prøv at bytte ud i regnestykket ovenfor.
- Forklar hvad funktionen

$$f(x,y) = 1 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + 2 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} + 2 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} + 4 \cdot \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}$$

udtrykker.

- Overvej, hvorfor der ikke står f(x) som normalt - hvorfor også y? Hvorfor mon vi kalder dette en funktion af to variable?
- Beregn f(2,3), f(2.5,3).. Hvad leder vi efter?
- Hvorfor vil I gerne finde ud af hvor denne funktion får sin mindste værdi?
- I skal nu anvende Maple til at finde den mindste samlede afstand til skolen. Vi er vant til at tegne grafer i et koordinat-system med en x-akse og en y-akse. Det er ikke nok her. Vi har også brug for en z-akse, vi har jo to variable x og y. Grafen for en funktion af to variable tegnes i tre dimensioner.

Prøv ved hjælp af Maple at definere f(x,y) ligesom I gør det ved f(x) og derefter tegne grafen ved hjælp af kommandoen plot3d(f(x,y)). Hvad viser grafen?

- Hvilket talpar (x,y) giver den mindste samlede afstand? Hvor er den optimale placering af skolen.
- For en graf i tre dimensioner kan der også tegnes niveaukurver, der svarer til højdekurver på et landkort. Prøv ved hjælp af Maple og kommandoen niveaukurver(f(x,y)) at tegne niveaukurver.

Prøv at ændre på udsnittet ved at tilføje betingelser for x og y ved niveaukurver(f(x,y), x=xstart..xslut, y=ystart..yslut). Kan I komme tættere på skolens optimale placering?

- Prøv også med

$$fsolve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=0, \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0\right\}, \{x,y\}\right)$$

Og lad Maple tygge lidt på det - det kan godt tage et stykke tid. Hvad finder Maple?

Til at forstå ligningerne ovenfor skal vi tænke i baner der ligner dem vi tænker i når vi finder toppunkter for en differentiabel funktion, nemlig at vi skal lede hvor f'(x)=0. Her skal vi i stedet gøre det for to snitkurver, der fremkommer, når y og x holdes fast - altså hvor vi laver snit gennem grafen og betragter de kurver i to dimensioner, der fremkommer.

- Nu har I fundet ud af hvor, I skal placere skolen, således at skolebørnene tilsammen skal køres så kort som muligt - mindst mulig brændstofforbrug.

Kan I komme på andre problemstillinger, der kan løses på samme måde?

I Taulov og Høje Tåstrup ligger der terminaler, hvortil gods fra udlandet transporteres med godstog. I Taulov og Høje Tåstrup læsses godset på lastbiler og transporteres herfra til lagre, butikker, mm. Det samme gælder den anden vej - gods transporteres fra lagre i Danmark med lastbil til Taulov og Høje Tåstrup og videre til udlandet herfra med godstog.

Kan valget af Taulov og Høje Tåstrup som terminaler med godstransport forklares ved hjælp af ovenstående løsningsmetode?

Der arbejdes på en timemodel mellem de større byer i Danmark. I Skanderborg tales der om en ny station.

Kan placeringen i lokalområdet i Skanderborg løses vha. ovenstående løsningsmetode?

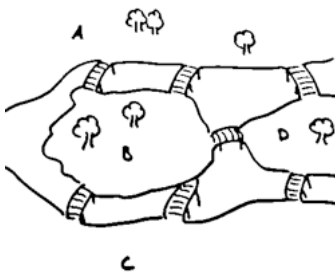
Interrail

INTRODUKTION TIL GRAFTEORI

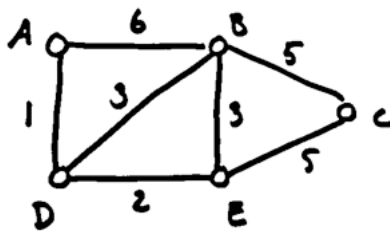
På de følgende sider skal I introduceres til Grafteori. I skal arbejde med nogle eksempler og på den måde nå frem til hvad det er for en størrelse og hvad det kan bruges til. Det er jeres opgave at se hvordan det kan bruge i forhold til planlægning af rejseruter, interrail.

I skal arbejde med

- Euler og historien om broerne i Königsberg.



- Grafer - ikke som vi kender dem i forbindelse med funktioner - men med knuder og kanter



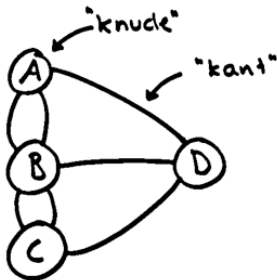
- Eulerture i grafer
- Vægtede grafer

- Dijkstras algoritme til bestemmelse af korteste afstande

Knude	A	B	C	D	E
Korteste sti til A	0	∞	∞	∞	∞
Sidst besøgte knude					
Status	M	M	M	M	M

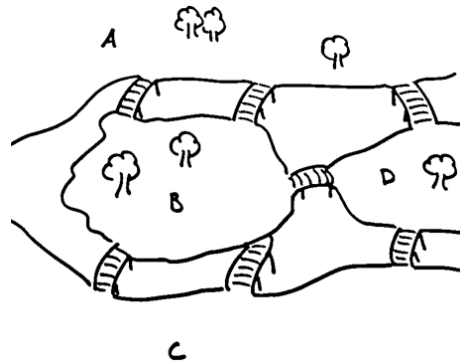
Arbejdsark

- Hvem er Leonhard Euler? I kan starte med at lytte til podcasten "a brief history of mathematics" episode 2 på BBC Radio 4 på følgende link <https://www.bbc.co.uk/programmes/b00ss0lk>
- Overfor ses et kort over broerne i Königsberg. Euler blev spurgt til om det kunne lade sig gøre at gå en eftermiddagstur over alle broer netop én gang. Startstedet måtte frit vælges. Kan det det? Prøv jer frem.

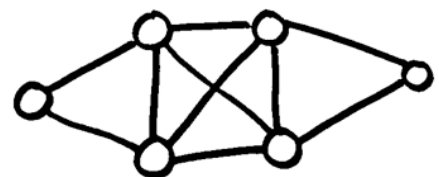
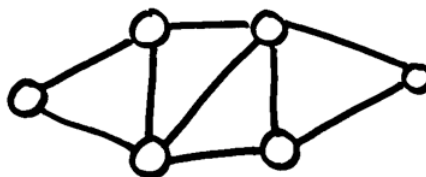
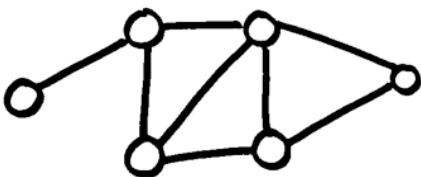


- Euler skabte det, vi kalder en graf (ikke at forveksle med grafer for funktioner), som består af knuder og kanter. Her repræsenterer knuderne de bydele, der forbindes af broer, og kanterne repræsenterer broerne.

Forklar, hvordan kortet over broerne hænger sammen med grafen her.

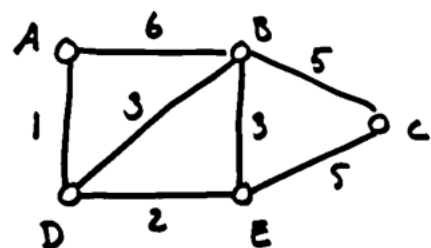


- Grafen passer altså ikke nødvendigvis med et kort. Det vigtige i en graf er den måde knuderne er forbundet på. Prøv at tegne en graf der repræsenterer broerne i Königsberg, men som ser anderledes ud
- Kan man gå en tur på alle kanterne netop én gang, kaldes turen en Eulertur. Kan man samtidig starte og slutte samme sted, kaldes turen en lukket Eulertur.
- Kan I finde Eulerture i følgende grafer.
Kan I finde lukkede Eulerture?



- Kan I finde en måde at se på grafen, om den har en Eulertur eller en lukket Eulertur, hvor I ikke behøver at prøve jer frem - noget der skal gælde? Prøv at se på antallet af kanter til hver knude - lige vs. ulige.
- Et eksempel på en graf er internettet hvor computere er forbundet med servere. Computere og servere er knuder mens kanterne repræsenterer hvordan computere og servere er forbundet trådløst eller vha. kabler. Det kan også være brugere af facebook - hvad repræsenterer knuder og kanter så?
- Kan I komme på andre eksempler på brugen af en graf? Hvad med Coronaopsporing?
- En graf kaldes sammenhængende hvis man kan nå til alle knuder fra alle andre. Prøv at huske tilbage til 1g. Hvem kendte hvem i jeres klasse inden I startede - kan I lave en graf der repræsenterer det? Var grafen sammenhængende? Hvordan vil den se ud i dag?
- Nu introducerer vi vægte på kanterne i grafen. Vægtene kan repræsentere eksempelvis prisen for at grave ledninger ned mellem knuderne, afstande mellem knuderne eller den tid, det tager at rejse fra den ene knude til den anden.

I overforstående graf repræsenterer vægtene afstand, eksempelvis er afstanden fra A til B er 6 selvom den ikke ser længere ud end afstanden fra D til E som er 2. Det behøver grafen ikke afspejle - det gør vægten. Kan I finde den korteste vej fra A til C?



- Hvem var Edsger Dijkstra og hvad har han med grafteori at gøre?
- Hvis grafen bliver stor, bliver det svært at afprøve og overskue den korteste vej fra én knude til en anden. Vi har brug for en algoritme. En algoritme er en fremgangsmåde til at løse et problem. Den består af en række trin der skal gentages og kan programmeres i et computerprogram. Se videoen om hvad en algoritme er på følgende link https://www.youtube.com/watch?v=e_WfC8HwVB8

I skal nu se en algoritme, der kaldes **Dijkstras algoritme**, og som finder den korteste vej fra en knude i en graf til en anden.

Dijkstras algoritme

Vi starter med at tage udgangspunkt i grafen ovenfor og så laver vi en Dijkstra tabel:

Knude	A	B	C	D	E
Korteste sti til A	0	∞	∞	∞	∞
Sidst besøgte knude					
Status	M	M	M	M	M

Vi skal nu løbende undersøge den korteste afstand fra A til hver af knuderne ved at følge og gentage de følgende trin 1-4. Som udgangspunkt lader vi afstandene til A være uendelige - bortset fra A til A som er 0. Vi opdaterer i tabellen når vi finder kortere afstande. Alle knuder har som udgangspunkt status M for midlertidig - lige så snart vi har fundet den korteste afstand fra A til en knude skifter denne knude status til P for permanent.

Vi skal nu følge nedenstående trin:

Trin 1. Vi vælger den knude x med status M, som har den korteste afstand til startknuden.

Trin 2. Vi betragter alle de knuder med status M, som er naboknuder til x

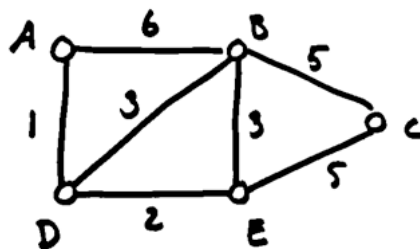
Trin 3. Afstand fra startknuden via x til naboknuderne beregnes og tabellen opdateres, hvis værdierne er mindre end de, der i forvejen er angivet, og sidst besøgte knude i tabellen rettes til x. Knuden x markeres herefter med P, da vi er færdige med at undersøge den.

Trin 4. Gentag trin 1 - 4, medmindre slutknuden har status P.

Lad os prøve på grafen fra før

Trin 1. Vi vælger den knude x med status M, som har den korteste afstand til startknuden.

I første omgang er det knude A, som har den korteste afstand til A - nemlig 0



Trin 2. Vi betragter alle de knuder med status M, som er naboknuder til x

Det er så knuderne B og D

Trin 3. Afstand fra startknuden via x til naboknuderne beregnes og tabellen opdateres, hvis værdierne er mindre end de, der i forvejen er angivet, og sidst besøgte knude i tabellen rettes til x. Knuden x markeres herefter med P, da vi er færdige med at undersøge den.

Afstanden fra A til B via A er 0+6 som er mindre end uendelig og tabellen opdateres med 6 og sidst besøgte knude med A.

Afstanden fra A til D via A er 0+1 som er mindre end uendelig og tabellen opdateres med 1 og sidst besøgte knude med A.

Knuden A markeres med P i tabellen.

Knude	A	B	C	D	E
Korteste sti til A	0	6	∞	1	∞
Sidst besøgte knude		A		A	
Status	P	M	M	M	M

Trin 4. Gentag trin 1 - 4, medmindre slutknuden har status P.

Trin 1. Vi vælger den knude x med status M, som har den korteste afstand til startknuden.

D med status M har den korteste afstand til A

Trin 2. Vi betragter alle de knuder med status M, som er naboknuder til x

Det er så knuderne B og E

Trin 3. Afstand fra startknuden via x til naboknuderne beregnes og tabellen opdateres, hvis værdierne er mindre end de, der i forvejen er angivet, og sidst besøgte knude i tabellen rettes til x. Knuden x markeres herefter med P, da vi er færdige med at undersøge den.

Afstanden fra A til B via D er 1+3, som er mindre end 6 og tabellen opdateres med 4 og sidst besøgte knude med D

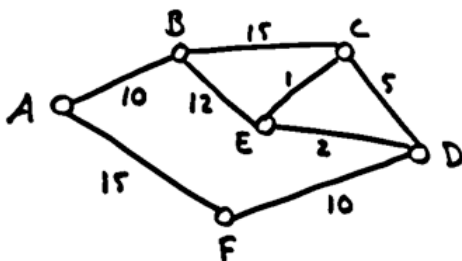
Afstanden fra A til E via D er 1+2, som er mindre end uendelig og tabellen opdateres 3 og sidst besøgte knude med D

Knuden D markeres med P i tabellen

Knude	A	B	C	D	E
Korteste sti til A	0	4	∞	1	3
Sidst besøgte knude		D		A	D
Status	P	M	M	P	M

Sådan fortsættes... Prøv selv indtil der under knuden C er angivet status P.

- Kan I finde den korteste vej fra A til C ved at bruge den udfyldte tabel?
- Afprøv Dijkstras algoritme på overfor stående graf for at finde den korteste afstand fra A til D.



- Find selv på et par grafer, hvor I afprøver Dijkstras algoritme.
- Prøv at finde et kort over Europa. Kan I betragte det som en vægtet graf?
- Hvordan spiller grafteori og Interrail sammen? Kan grafteori have betydning i planlægning af en rejse gennem Europa? Hvordan tror I at eks. rejseplanen og Google Maps er bygget op?